國立高雄大學九十二學年度研究所碩士班招生考試試題

系（所）別：統計學研究所　　　　科目：基礎數學

滿分為100分。做答時請於答案卷上寫上題號及過程。

1. (8 %) Find the limit of

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{(2+x+\triangle x)^{\frac{1}{2}} + \ln(1+(\triangle x/x))^2 - (2+x)^{\frac{1}{2}}}{\triangle x}$$

for some fixed $x > 0$.

2. (12 %) Compute $\int xe^{2x^2} \sin x^2 dx$.

3. (12 %) Suppose that function f satisfies $f(x+y) = f(x) + f(y)$ for all x, y, and that f is continuous at 0. Prove that f is continuous at every point.

4. (1) (10 %) Prove that the sequence $\sqrt{3}$, $\sqrt{3\sqrt{3}}$, $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}, \cdots$ converges.

   (2) (8 %) Find the limit of the above sequence.

5. Define the linear transformation $T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ by

$$T(f) = \begin{pmatrix} f(1) - f(2) & 0 \\ 0 & 2f(0) \end{pmatrix}, \qquad \text{for } f \in P_2(\mathbb{R}).$$

   Here $P_2(\mathbb{R})$ denotes the collection of all polynomials of degree 2 with real coefficients and $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ the set of all 2×2 matrices with entries from $\mathbb{R}$.

   (1) (8 %) Find a basis for the null space of T.

   (2) (8 %) Find a basis for the range of T.

6. (12 %) Let A be an $n \times n$ matrix with characteristic polynomial

$$f(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0.$$

   Prove that A is invertible if and only if $a_0 \neq 0$.

7. (10 %) Find all $x \in \mathbb{R}$ so that

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{pmatrix} < 4.$$

8. (12 %) Let $A = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$. Evaluate $\exp(A)$.

國立高雄大學九十二學年度研究所碩士班招生考試試題

系（所）別：統計學研究所　　　　　　　　　　科目：數理統計

每題20 分，該有的步驟皆須附上。

1. 設X, Y, Z 為三獨立的隨機變數，且皆有$N(0,1)$分佈。又令$U = min\{X, Y\}$。
   (i) 試證U^2與X^2之分佈相同。
   (ii) 試求E(U^2), Var(U^2)。
   (iii) 試利用(i)決定Z/U之分佈，指出此為那一常見的分佈。
   (iv) 試利用(i) 決定Z^2/U^2之分佈，指出此為那一常見的分佈。
2. 設$X_1, \cdots, X_n$ 為一組由$N(\mu, \sigma^2)$分佈所產生之隨機樣本。試分別對下列二情況，求μ^2 之最小變異估計量(UMVUE)：(i) σ^2 已知，(ii) σ^2 未知。
3. 設$X_1, \cdots, X_n$ 為一組由beta 分佈$Be(\theta, 1), \theta > 0$, 所產生之隨機樣本。令$T = -\sum_{i=1}^{n} \log X_i/n$。
   (i) 試求E(T), Var(T)。
   (ii) 試求$1/\theta$之一UMVUE。並問此UMVUE是否達到CRLB (Cramér-Rao Lower Bound)。
4. 設X 有二項分佈$B(5, \theta)$。欲檢定$H_0 : \theta = 1/2, v.s. H_1 : \theta = 3/4$。令$\alpha$表型I 錯誤(Type I error) 之機率。試利用統計量X，分別對(i) $\alpha = 1/32$, (ii) $\alpha = 6/32$, 給出最強力(most powerful)檢定。
5. 設$X_1, \cdots, X_n$ 為一組由均勻分佈$U[0, \theta], \theta > 5$, 所產生之隨機樣本。令U_n 表$X_1, \cdots, X_n$中小於5之個數。試證$T_n = 5n/U_n$ 為θ之一致估計量(consistent estimator)。

國立高雄大學九十二學年度研究所碩士班招生考試試題

系（所）別：統計學研究所　　　　　　　　科目：機率論

1-5題每題16分，第6 題20 分

1. 令X 與Y爲i.i.d且有均勻分佈$U(0,1)$。

   (i) 令$R=\sqrt{X^2+Y^2}$。試求R之機率密度函數(p.d.f.)及累積機率分佈函數(c.d.f.)。

   (ii) 令$U=min(X,Y)$, $V=max(X,Y)$, 試求$Z=V-U$之分佈，及E(Z)與Var(Z)。

2. 設X,Y 之聯合p.d.f. 爲$f(x,y)=Cx^{\alpha-1}y^{\beta-1}(1-x-y)^{\gamma-1}, x,y>0,$ 且$x+y\le 1,$ 其中C爲一常數。

   (i) 試証$C=\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)/(\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma))$

   (ii) 試証X,Y之二邊際分佈皆爲beta分佈。

   (iii) 試問X 與Y 是否獨立?

   (vi) 令$W=X/(1-X), Z=Y/(1-Y)$, 求W,Z 之聯合p.d.f.

3. 設X 有$\mathcal{P}(\lambda)$ 分佈, 且給定$X=k, Y$ 有$\mathcal{B}(k,p)$分佈. 試証Y與$X-Y$獨立, 並求給定$Y=y, X$之條件分佈.

4. 設X 有$\mathcal{E}(1)$ 的分佈, 又設給定$X=x>0$, $Y_1,\cdots,Y_n$ 爲條件獨立,且皆有$\mathcal{E}(x)$分佈. 即$h(y|x)=xe^{-xy}, y>0$.

   (i) 試求$\mathbf{Y}=(Y_1,\cdots,Y_n)$之p.d.f.

   (ii) 令$z=y_1+\cdots+y_n$, 試求給定$\mathbf{Y}=\mathbf{y}=(y_1,\cdots,y_n)$, X之條件p.d.f.，說明其分佈爲何？並求$E(X|\mathbf{Y}=\mathbf{y})$, 及$Var(X|\mathbf{Y}=\mathbf{y})$.

5. 設X_n有$\Gamma(n,\beta)$分佈, 以F_n 表$(X_n/\beta-n)/\sqrt{n}$之d.f.

   (i) 試求X_n之特徵函數。

   (ii) 利用(i)之結果，求F_n之特徵函數。

   (iii) 問$n\to\infty$時, F_n會弱收斂至何d.f. F? 並說明理由。

6. 設$X_1,\cdots,X_n$ 爲一組隨機樣本，且以$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ 爲其共同分佈。

   (i) 試證$\overline{X}_n=\sum_{k=1}^n X_k/n$ 與$S_n^2=\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X}_n)^2/(n-1)$ 獨立，並分別求出其分佈函數爲何。

   (ii) 試給出統計量$\sqrt{n}(\overline{X}_n-\mu)/S_n$之分佈，並說明之。