國立高雄大學九十五學年度研究所碩士班招生考試試題

科目：基礎數學(含微積分及線性代數)　系所：統計學研究所　■可 □否 使用計算機

考試時間：100 分鐘　本科原始成績：滿分 100 分

(1) (16%) Evaluate (a) $\int_0^\infty x^3(e^{-x^2}+e^{-x})dx$; (b) $\int_0^\infty x^{-1/2}e^{-x}dx$.

(2) (16%) Test the following series for convergence or divergence

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log_e n}{n\sqrt{n+2}}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2+3k+2}+\frac{k+1}{k!}\right)$.

(3) (10%) Find c so that

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2c}{x-c}\right)=8.$$

(4) (10%) Prove that the inequalities

$$1-\frac{1}{x}<\log_e x<x-1$$

are valid for $x>0, x\neq 1$.

(5) (10%) If A and B are positive definite $n\times n$ matrices and $A-B$ is non-negative $n\times n$ matrix, show that $\det(A)\geq\det(B)$.

(6) (10%) Let A and B be defined by

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-1&1&-3\end{bmatrix}\text{ and } B=\begin{bmatrix}0&2&1\\0&4&2\\0&-2&-1\end{bmatrix}.$$

Show that the column space of B is a subspace of the column space of A .

(7) (16%) Show that the matrix A below is positive definite, and find a matrix P such that $P^TP=A$.

(8) (12%) Let A be a $n\times n$ idempotent matrix, that is $A^2=A$. Find all possible eigenvalues of $I-A$ where I is the $n\times n$ identity matrix.

國立高雄大學九十五學年度研究所碩士班招生考試試題

科目：數理統計　　系所：統計學研究所　　■可 □否 使用計算機

考試時間：100 分鐘　　本科原始成績：滿分 100 分

1. Let f_0 and f_1 be two probability density functions. The Kullback-Leibler information number is defined as

$$K(f_0, f_1) = E_0 \log \frac{f_0(X)}{f_1(X)} = \int \log \frac{f_0(x)}{f_1(x)} f_0(x)dx.$$

Show that $K(f_0, f_1) \geq 0$. (12 points)

2. Suppose $X_1, \cdots, X_n$ are i.i.d. uniform observations on the interval $(\theta, \theta+1)$, $-\infty < \theta < \infty$. Find a minimal sufficient statistic for θ. (10 points)

3. Suppose $2n$ random variables, $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \cdots, X_n, Y_n$, are independent, and for each i, $i = 1, \cdots, n$, X_i and Y_i follow the normal distribution with mean μ_i and variance σ^2, i.e. $N(\mu_i, \sigma^2)$. Here the parameters, $\mu_1, \cdots, \mu_n$ and σ^2, are assumed to be unknown.

   (a) Find the MLE of σ^2, $\hat{\sigma}^2$, and show that $\hat{\sigma}^2$ is a biased estimator of σ^2. (12 points)

   (b) Based on $\hat{\sigma}^2$, find the best unbiased estimator (UMVUE) of σ^2. (12 points)

4. Let $X_1, \cdots, X_n$ be a sample from a $N(\mu_1, \sigma^2)$ and $Y_1, \cdots, Y_m$ be another independent sample from a $N(\mu_2, \rho^2\sigma^2)$, where ρ is known. Define $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$; $\bar{Y} = \sum_{i=1}^m Y_i/m$; $S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ and $S_Y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2$. Show that

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\rho^2}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2/\rho^2}{n+m-2}}}$$

has a t distribution with $n+m-2$ degrees of freedom and $S_Y^2/(\rho^2 S_X^2)$ has an F distribution with $m-1$ and $n-1$ degrees of freedom. (20 points)

國立高雄大學九十五學年度研究所碩士班招生考試試題

科目：數理統計　系所：統計學研究所　■可 □否 使用計算機

考試時間：100 分鐘　本科原始成績：滿分 100 分

5. Suppose that $X_1, \cdots, X_n$ are i.i.d. with a beta $(\mu,\ 1)$ pdf and $Y_1, \cdots, Y_m$ are i.i.d. with a beta$(\theta,1)$ pdf. Also assume that the Xs are independent of the Ys.

   (a) Find an likelihood ratio test (LRT) of $H_0 : \theta = \mu$ versus $H_1 : \theta \neq \mu$, and show that this LRT can be based on

   $$T = \frac{\sum \log X_i}{\sum \log X_i + \sum \log Y_j}.$$

   (12 points)

   (b) When H_0 is true, find the distribution of T, and then show how to get a test of size $\alpha = 0.10$. (10 points)

6. Let $X_1, \cdots, X_n$ be a sample with pdf $f(x|\theta) = \theta \exp(-\theta x), x > 0$. Here the parameter θ is unknown and $\theta > 0$. Now we are interesting in testing

   $$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ versus } H_1 : \theta < \theta_0.$$

   Find the UMP (uniformly most powerful) level α test. (12 points)

國立高雄大學九十五學年度研究所碩士班招生考試試題

科目：機率論　　系所：統計學研究所　　■可 使用計算機
考試時間：100 分鐘　　本科原始成績：滿分 100 分　　□否

第1題10分, 第2-6題各18分, 須附上適當的步驟 。

1. 設X與Z為二獨立的隨機變數, X在區間$(0,1)$均勻分佈, Z在區間$(0,0.1)$均勻分佈 。令$Y=X+Z$ 。

   (i) 試求(X,Y)之聯合機率密度函數$f(x,y)$,

   (ii) 試求共變異數$Cov(X,Y)$ 。

2. 設$P(X=i)=p_i$, $p_i \geq 0$, $i=0,1,2$, $p_0+p_1+p_2=1$ 。設$X_1, X_2, \cdots$為獨立且皆與X有相同分佈 。令$S_n=\sum_{i=1}^n X_i$, $n \geq 1$, $Q_t=\min\{n|n \geq 1, S_n \geq t\}, t \geq 0$ 。

   (i) 當$p_0=p_1=p_2$, 試求$P(Q_4=4)$,

   (ii) 試求$P(Q_1=i)$, $i \geq 1$,

   (iii) 當$p_2=0$, t,k為正整數, $k \geq t$, 試求$P(Q_t=k)$, 並指出此為那一常見分佈, 參數為何?

3. 設(X,Y)之聯合機率密度函數為

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{k} c_i \frac{x^{p-1}e^{-x/r_i}}{\Gamma(p)r_i^p}\frac{y^{q-1}e^{-y/r_i}}{\Gamma(q)r_i^q},\ x,y>0,$$

   其中$k \geq 1$, $p,q>0$, $r_1,\cdots,r_k>0$, $c_1,\cdots,c_k>0$, 且$\sum_{i=1}^k c_i=1$ 。
   令$U=X+Y$, $W=X/(X+Y)$ 。

   (i) 試求U,W之聯合機率密度函數$g(u,w)$, 並給出u,w之範圍,

   (ii) 試指出W之邊際分佈為那一常見分佈, 參數為何?

   (iii) U與W是否獨立, 原因為何?

4. 設隨機變數Z之機率密度函數為

$$f(z)=2\phi(z)\Phi(\lambda z),\ z \in R,$$

   其中$\lambda \in R$為一常數, $\phi(z), \Phi(z)$分別為$\mathcal{N}(0,1)$分佈之機率密度函數及分佈函數 。

   (i) 若$\lambda \neq 0$, 則$f(z)$是否為偶函數?

   (ii) 試求$Y=Z^2$之分佈, 並指出此為那一常見分佈, 參數為何?

   (iii) 試證上述$f(z), z \in R$, 確為一機率密度函數 。

國立高雄大學九十五學年度研究所碩士班招生考試試題

科目：機率論　　　　系所：統計學研究所　　　　■可 □否 使用計算機
考試時間：100 分鐘　　　　本科原始成績：滿分 100 分

5. 設X_1, X_2, X_3相互獨立，且皆有在$[0, a]$上之均勻分佈，其中$a > 0$為一常數。令$X_{(1)} \le X_{(2)} \le X_{(3)}$表其順序統計量。令$0 \le t \le a$。
   (i) 試求給定$X_{(3)} = t$，$X_{(2)}$之條件分佈，
   (ii) 試求$E\left(X_{(2)}^2 + X_{(3)} | X_{(3)} = t\right)$，
   (iii) 試求$E\left(e^{-sX_{(2)}} | X_{(3)} = t\right)$，$s \ge 0$。

6. 設$P(X_n = 0) = \frac{1}{n}$，$P(X_n = 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$，$P(X_n = 2) = \frac{1}{2} - \frac{2}{n}$，$n \ge 5$。令$F_n(x) = P(X_n \le x)$，$x \in R$。
   (i) 試給出$F_n(x), x \in R$,
   (ii) 試給出一分佈函數$F(x)$，$x \in R$，使得對每一F之連續點x，$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$。
   (iii) 試給一隨機變數X，使得其分佈函數為(ii)中之F。